

硕士学位论文

若干孤子方程的 Lax 对与 Darboux 变换的构造

Construction of Lax Pairs and Darboux Transformations for
Some Soliton Equations

作者姓名: 马占运

学科、专业: 应用数学

学 号: 20901055

指导教师: 梅建琴

完成日期: 2012 年 05 月

大连理工大学

Dalian University of Technology

大连理工大学学位论文独创性声明


作者郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用内容和致谢的地方外，本论文不包含其他个人或集体已经发表的研究成果，也不包含其他已申请学位或其他用途使用过的成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

若有不实之处，本人愿意承担相关法律责任。

学位论文题目：_____

作者签名：_____日期：_____年___月___日

摘 要

孤立子理论是应用数学和数学物理的重要内容之一, 该理论广泛应用于非线性物理学、动力学、超导、量子场论、气象学、 通讯等领域. 然而, 寻求非线性演化方程的精确解一直以来都是一个很困难的问题. 非线性方程借助于方程的 Lax 对可以转化为线性方程. 迄今为止, 延拓结构方法是构造非线性演化方程 Lax 对的最为成功的方法. 建立在 Lax 对基础上的 Darboux 变换是得到非线性演化方程精确解的最有效的方法之一.

本文以非线性演化方程为研究对象, 主要讨论了求解该类方程的两种方法: 延拓结构法和 Darboux 变换方法.

主要工作如下:

第一章对孤立子理论、可积系统、延拓结构理论、Darboux 变换和 Bäcklund 变换理论产生的背景、前人的工作及研究方法做了简单的综述.

第二章介绍了 Lax 对和 Lax 方程的定义, 并利用延拓结构理论, 构造了 Boussinesq 方程组和修正 KdV 方程组的 Lax 对.

第三章构造了经典 Boussinesq-Burgers 系统、Boussinesq 方程组的和复的 KdV 方程的 Darboux 变换, 进一步得到了经典 Boussinesq-Burgers 系统的单孤子解和复的 KdV 方程的精确解.

最后简单总结了全文, 并给出了可以继续探讨的问题.

关键词: Lax 对; Darboux 变换; 延拓结构; 孤子方程

Construction of Lax Pairs and Darboux Transformations for Some Soliton Equations

Abstract

Soliton theory is one of significant parts in applied mathematics and mathematical physics, and it has important applications in the non-linear physics, dynamics, superconductivity, quantum field theory, meteorology, communication, and so on. However, it is a difficult problem to seek exact solutions for the non-linear evolution equations all the time. ~~Non-linear equations~~ can be transformed into linear equations by ~~means of~~ Lax pairs of the equations. So far, prolongation structure theory is the most successful method for constructing Lax pairs of the non-linear evolution equations. The Darboux transformation based on the Lax pairs is one of efficient methods to derive the exact solutions of the non-linear evolution equations.

Non-linear evolution equations are mainly studied in this thesis. Two methods to solve these equations are discussed, prolongation structure and Darboux transformation method.

The main works are as follows:

In Chapter 1, the backgrounds, previous works and the research methods is briefly introduced ~~of~~ the soliton theory, integrable systems, prolongation structure theory, Darboux transformation and Bäcklund transformation, respectively.

In Chapter 2, definitions of Lax pairs and Lax equations are introduced, then the Lax pairs of the Boussinesq equations and modified KdV equations are constructed based on the prolongation structure theory.

In Chapter 3, Darboux transformations of ~~a~~ classical Boussinesq-Burgers system, Boussinesq equations and complex KdV equation are constructed. The single soliton solution of the classical Boussinesq-Burgers system and exact solutions for the complex KdV equation based on the Darboux transformations are obtained.

Lastly, a brief summary of the thesis is given, and some future works are also pointed out.

Keywords: Lax pair; Darboux transformation; prolongation structure; soliton equation

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	III
1 绪论.....	1
1.1 孤立子理论.....	1
1.2 可积系统概述.....	1
1.3 孤子方程的求解方法.....	2
1.4 延拓结构理论.....	3
1.5 Bäcklund 变换与 Darboux 变换.....	3
1.5.1 Bäcklund 变换.....	3
1.5.2 KdV 方程、NLS 方程的 Bäcklund 变换.....	4
1.5.3 Darboux 变换.....	4
2 孤子方程的延拓结构.....	7
2.1 Lax 对及 Lax 方程.....	7
2.2 Boussinesq 方程组的延拓结构.....	8
2.3 修正 KdV 方程组的延拓结构.....	11
2.4 小结.....	15
3 孤子方程的 Darboux 变换及其精确解.....	17
3.1 经典 Boussinesq-Burgers 系统的 Darboux 变换和精确解.....	17
3.1.1 经典 Boussinesq-Burgers 系统的 Darboux 变换.....	17
3.1.2 经典 Boussinesq-Burgers 系统的精确解.....	21
3.2 Boussinesq 方程组的 Darboux 变换.....	23
3.3 复的 KdV 方程的 Darboux 变换和精确解.....	25
3.3.1 复的 KdV 方程的 Darboux 变换.....	25
3.3.2 复的 KdV 方程的精确解.....	26
3.4 小结.....	29
4 结论.....	31
参考文献.....	33

攻读硕士学位期间发表学术论文情况.....	37
致谢	39
大连理工大学学位论文版权使用授权书.....	41

1 绪论

本章简要介绍孤立子理论的历史背景. 对可积系统、延拓结构理论、Darboux 变换和 Bäcklund 变换的产生、发展以及国内外的研究情况进行简单的综述.

1.1 孤立子理论

对微分方程的研究是应用数学的主要内容之一, 而这些方程都是以地理、物理等学科中的具体问题为背景. 因此, 对这些方程的解决有很大的实际意义. 在实际中遇到的方程大多是非线性偏微分方程, 且非线性对问题的影响也是不可忽略的. 所以, 求解非线性偏微分方程, 尤其是非线性发展方程迫在眉睫. 孤立子就是非线性发展方程中的典型代表. 在最近的几十年, 它广泛应用于数学、通讯、流体物理、量子场论等领域.

苏格兰科学家 John Scott Russel 最早观察到了孤立子现象, 即运河中保持形状和速度不变的水团, 碰撞后消失. 后来他称之为孤立波. 然而, 并不是所有的人都认为孤立波是自然界的一种特殊的现象. Airy, Stokes, Boussinesq 和 Rayleigh 对这种波进行了研究, 并与 Russel 展开了激烈的争论. 这场争论最终由 Korteweg 和 G.de Vries 在 1895 年解决. 他们从流体力学的研究中得到了浅水波方程, 也就是后来所称的 KdV 方程.

KdV 方程的提出, 理论上阐明孤立波是存在的. 但是, 有几个问题研究者还不能确定: 孤立波是否稳定; 孤立波碰撞后是否改变速度和波形等等. 因此, 对孤立波的讨论告一段落.

大约 60 年之后, 由 Fermi, John Pasta 和 Stan Ulam 提出了 FPU 问题, 对孤立波的研究才又一次活跃起来.

1962 年, Perring 和 Skyrme 通过对 sine-Gordon 方程的观察发现: 这个方程产生的孤波解相互碰撞后保持原来的速度和形状. 1965 年, 美国 Princeton 大学的应用数学家 Martin D.Kruskal 和 Norman J.Zabusky 对孤立波碰撞后的相互作用过程进行了模拟, 并首次引入“孤立子”这一术语来描述具有粒子性质的波, 即一大类具有特殊性质的解的非线性偏微分方程以及与之相对应的物理现象. 之后, 很多领域的科研工作者都开始对孤立子进行研究, 许多关于孤立子的专著也相继问世^[1-3], 较为完善的孤立子理论也在逐步形成.

1.2 可积系统概述

可积系统^[4]伴随经典力学而产生, 是 Hamilton 描述几何时提出来的. 许多基本的物理系统都可以表示为 Hamilton 系统. Jacobi 创立了 Hamilton-Jacobi 方法解决了一系列动力学问题也推动了量子力学的发展. 20 世纪 20 年代中期, Gardner、Greene、Kruskal 和 Miura 提出了求解 KdV 方程的经典的反散射方法. 不久之后, Lax 公式被提出. Faddeev、Zakharov 和 Gardner 揭示了 Lax 表示和可积性的关系, 可积系统才慢慢发展起来. 近些年来, 这些内容延伸到量子力学、航天科学等领域, 因此, 科研工作者对可积系统高度关注, 该系统的研究工作非常活跃. 研究者一般采用两种可积性: Lax 可积和 Liouville 可积. 简单来说, 如果一个非线性方程有 Lax 表示, 就说该方程 Lax 可积; 若非线性演化方程可以写成广义

的 Hamilton 方程的形式, 且存在可数个两两对合的守恒密度, 则称该方程在 Liouville 意义下可积. 如 Newton 求解的 Kepler 问题.

Lax 可积的运动方程有这种形式 $\dot{L}(\lambda) = [M(\lambda), L(\lambda)]$, 矩阵 $M(\lambda)$, $L(\lambda)$ 依赖动力变量, 参数 λ 称为谱参数, $[,]$ 表示交换矩阵. 因为矩阵 $M(\lambda)$, $L(\lambda)$ 的约束条件比较强, 所以可积系统非常少. 连续的 Lax 对在对适当的群做分解的时候会出现. 把谱参数考虑进去, 群会成为一个 loop 群, 相应的分解问题就变成了一个 Riemann-Hilbert 问题, 这是这个学科的主要工具.

在群理论中, 解运动方程等价于群分解问题. 用分析的观点来看, 解包含在 Lax 矩阵的特征向量中. 我们可以通过谱曲线上 Jacobian 簇定义的 θ 函数来描述动力变量. 这个框架一般是利用一阶可微方程 $(\partial_\lambda - M_\lambda(\lambda))\Psi = 0$ 来代替 Lax 矩阵, 其中, $M_\lambda(\lambda)$ 依赖实数 λ . 当 λ 描述极值点 M_λ 附近的 loop 群时解 Ψ 取得不平凡的单值. 等值问题包含所有的单值数据 M_λ . 一般来说, 解依靠大量的连续参数, 关于这些参数的变形的方程形成了一个可积系统. 等谱问题的 θ 函数提升到更加一般的 τ 函数.

19 世纪末期, 科研工作者发现多数 Hamilton 系统并不是完全可积. 于是人们开始质疑可积性的重要性. 直到 20 世纪 60 年代对孤立子的研究后才发现尽管这些方程背景不相同, 但是都可以认为是 Liouville 完全可积系统. 1978 年, Arnol 发表了《经典力学中的数学方法》, 进一步发展和完善了 Hamilton 系统理论. Magri、Vinogradov、Olver 提出了建立了 Poisson 流形理论上的 Poisson 括号. Poisson 流形的维数可以是有限维或无限维, Liouville 可积性才可以推广到发展方程上来.

我们从两个方面对非线性发展方程的可积性进行研究, 一方面, 如何来判定所给方程的可积性; 另一方面, 如何从数学理论上建立更好的可积模型. 在这方面, 郑州大学曹策问教授, 复旦大学谷超豪教授和南佛罗里达大学的马文秀教授等做了推广和发展工作.

随着科研工作者对孤立子理论的进一步研究, 人们提出了利用驻定流方法和 Lax 对非线性方法去寻找 Liouville 意义下完全可积的有限维 Hamilton 系统. 在驻定流方法方面, 前苏联数学家做了不少工作. 曹策问利用后一种方法得到了很多有限维可积系统^[5]. 清华大学曾云波教授, 中国科学技术大学李翊神教授^[6]提出了把无限维 Hamilton 系统限制在有限维子流形上构造有限维可积的 Hamilton 系统的一般方法. 马文秀^[7]利用双线性方法, 获得了许多 Hamilton 系统.

人们对可积有不同的理解, 所以, 研究可积只是一定条件下的可积, 并不清楚什么是完全可积. 可积系统理论还未完善, 需要科研工作者继续做下去.

1.3 孤子方程的求解方法

孤子方程的精确解有重要的实际意义, 而由于孤子方程的复杂性使得该类方程的求解问题一直以来都是一个难题. 科研工作者通过努力得到孤子方程的孤子解有很多种方法: 反散射方法^[8, 9]、Hirota 双线性方法^[10]、Bäcklund 变换^[11, 12]、齐次平衡法^[13]、Darboux 变换^[14-18]、tanh 方法等等.

反散射方法是数学物理上的一个重大发现, 是求解非线性偏微分方程的重要方法之一. Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura (GGKM) 利用 Schrödinger 方程的反散射理论得到了

KdV 方程的 N 个孤子解. Lax 指出, 该方法的前提是找到方程的 Lax 对. Ablowitz, Kaup, Newell 和 Segur 得到了该方法求解方程的软件包. 为反散射方法的快速发展提供了方便.

Hirota 双线性方法最早是由 Hirota 在 1971 年提出来的. 他将孤子方程引入变换化为双线性形式, 最后得到了多孤子解. 该方法推广到 $(2+1)$ 的可积系统中, 得到了新的孤子解类型. Satsuma, Ablowitz 等人该方法的基础上得到了 KP 方程的 lump 解.

齐次平衡法是王明亮等人提出来的, 高以天等人对高方法进行了改进, 推广到 $(2+1)$ 维. 张鸿庆教授和范恩贵教授利用该方法得到了很多精确解.

1.4 延拓结构理论

如何判定一个非线性偏微分方程满足 Lax 可积是可积理论的基本问题. 也就是说, 如何去找出算子 L 和 M , 使得该方程有 Lax 表示. 反之, 若已知 L 和 M 满足的相容条件, 如何使得 $L_t + [L, M] = 0$ 为一个不平凡的非线性偏微分方程. Ablowitz 详细地对后者进行了探讨与研究. 目前为止, 解决方程的 Lax 对问题最成功的方法是延拓结构法. Lie 代数和微分几何在 Wahlquist 和 Estabrook 的延拓结构中起到了不可替代的作用.

19 世纪对 sine-Gordon 方程等的研究, 已经蕴含了利用微分几何来讨论孤立子方程的思想. 20 世纪 70 年代初, Harrison 和 Estabrook 就利用嘉当的外微分形式, 将一些偏微分方程用与之等价的外微分形式表示出来, 又求得方程的对称群的无穷小生成元得到了方程的解.

接下来, Wahlquist 和 Estabrook^[19, 20]利用微分几何为工具提出了延拓结构理论, 并利用该理论讨论了 KdV 方程和 Schrödinger 方程的延拓结构.

其中, Hermann^[21]利用联络来解释 W-E 的延拓结构理论. 在纤维丛上的联络论阵的基础之上, 郭汉英等^[22]建立了非线性演化方程延拓结构的协变几何理论.

W-E 的延拓结构理论主要是以嘉当的外微分形式为主要工具. 一个偏微分方程从几何的角度出发来进行研究的时候, 最先去讨论由原方程的所有变量所生成的流形 M , 还有由独立变量作为所有变量的子集而生成该流形的一个子流形 N . 在流形 M 上定义出一组外微分形式与之对应, 使得当它们限制在嵌入子流形 N 上, 并且恒等于零之后, 就等价于原来的方程.

王灯山^[23]讨论了耦合的 KdV 方程的延拓结构. 首都师范大学吴可教授和他的学生^[24]对协变的延拓结构做出了贡献. 河南大学白永强老师和他的学生^[25]研究讨论了半离散的延拓结构.

1.5 Bäcklund 变换与 Darboux 变换

1.5.1 Bäcklund 变换

一般用来描述孤立子相互作用后变化情况的方法是看它经过一系列变换之后是否有根, 这最早是在 19 世纪由瑞典著名的几何学家 Bäcklund 提出的. 他研究有负常高斯曲率的曲面, 并由此产生了伪球面. 这类曲面的研究至少可以追溯到 1862 年, Edmond Bour 在 Gauss-Mainardi-Codazzi 参数伪球面渐进坐标系统中得到了著名的 sine-Gordon 方程. Bäcklund 在 1885 年研究这类曲面时代入了一个变换, 把 sine-Gordon 方程的一个解变成

方程的另一个解, 也就是后来说的 Bäcklund 变换. 1879 年, Bianchi 用数学变换语言建立了伪球面的纯几何理论. 1882 年, Bäcklund 详细地提出了他著名的变换 \mathbb{B}_σ , 使得伪球面可以迭代产生. 1883 年, Lie 做了分解 $\mathbb{B}_\sigma = \mathbb{L}_\sigma^{-1} \mathbb{B}_{\pi/2} \mathbb{L}_\sigma$, 证明了 Bäcklund 变换 \mathbb{B}_σ 是 Lie 变换 \mathbb{L}_σ 、 \mathbb{L}_σ^{-1} 和不依赖参数的 Bianchi 变换 $\mathbb{B}_{\pi/2}$ 的结合. 因此, Lie 变换把关键参数 σ 引进了原始的 Bianchi 变换.

1892 年, Bianchi 提出 Bäcklund 变换 \mathbb{B}_σ 满足交换性质 $\mathbb{B}_{\sigma_2} \mathbb{B}_{\sigma_1} = \mathbb{B}_{\sigma_1} \mathbb{B}_{\sigma_2}$, 是非线性叠加的结果, 称之为交换定理. 1953 年, Seeger 等人在关于晶体位错的研究中表明了 Bianchi 的交换定理在非线形物理中应用广泛.

1.5.2 KdV 方程、NLS 方程的 Bäcklund 变换

Wahlquist 和 Estabrook 在 1973 年观察到 KdV 方程也具有相似的 Bäcklund 变换和叠加公式. 在 Bäcklund 形式的变换之下也有不变量, 而且有与之相联系的交换定理. 他们从 KdV 方程的两个解 u, u' 开始计算, 消去解的高阶导数, 得到了一个与 u 和 u' 有联系的微分方程组. 他们在 20 世纪 70 年代中期提出了求非线性方程 Bäcklund 变换的延拓结构法^[26]在对 KdV 方程的原始的数据研究中通过对交换定理的反复应用, 得到了多孤子解.

1974 年, Lamb 利用 Clairin 在 1910 年提出的经典的方法得到非线性 Schrödinger 方程 (NLS) $iq_t + q_{xx} + vq^2|q| = 0$ 的 Bäcklund 变换, 于是一个新的位错原理通过 Bäcklund 变换再一次产生. NLS 方程在纤维光学方面有重要的应用.

因此, 1974 年, KdV 方程、sine-Gordon 方程、NLS 方程的 Bäcklund 变换已经提出. 同年, 国际科学基本原理会议在美国 Vanderbilt 大学召开, 主要讨论了 Bäcklund 变换在孤子理论中的地位和角色. 1973 年, Ablowitz 等人介绍了 ZS-AKNS 谱问题, 一个 1+1 维非线性发展方程的广义的谱问题在协调关系下与 ZS-AKNS 系统是相容的. Chen 用一种简洁的方式得到了 KdV 方程, sine-Gordon 方程, NLS 方程的自 Bäcklund 变换.

20 世纪 80 年代初, Weiss、Tabor 和 Carnevale 将常微分方程的 Painleve 可积判定法^[27]推广到偏微分方程, 而且还给出了可积方程的 Bäcklund 变换. 同时, 延拓法及局部高阶切丛法等也都同样能得到 Bäcklund 变换. 虽然, Bäcklund 变换的主要特征是可以从旧的解出发求得新解. 可是实际操作起来非常繁杂. 不过, 非线性叠加公式和不变性定理只是在解之间进行的代数运算, 所以这个变换还是有一定的可行性, 于是得到了数学家及科研工作者的肯定. 因此, Bäcklund 变换在求解孤子方程的有意义的解时得到了广泛的应用.

1.5.3 Darboux 变换

Darboux 变换被认为是 Bäcklund 变换的特例. 1882 年, Darboux 在研究一维 Schrödinger 方程的等谱特征值问题, 他利用谱问题和它的伴随问题(即 Lax 对)的解及相联系的非线性方程的一个解, 获得了非线性方程的新解即 Darboux 变换. 人们有时把 Darboux 变换称为 Bäcklund 变换或称为求 Bäcklund 变换的 Darboux 方法.

19 世纪, ZS-AKNS 系统的线性结构在孤子理论中还适合一类重要的 Darboux 变换. 这个变换是 1882 年 Darboux 在研究 Sturm-Liouville 问题时得到的. 1955 年, Crum 根据

Sturm-Liouville 相关问题建立了重复的 Darboux 变换. 1975 年, Wadati 等人做出 Crum 变换, 并利用它得出了 ZS-AKNS 系统部分方程的多孤子解. 在几何方面, 重复 Darboux 变换出现在 Eisenhart 的经典的曲面理论 Transformations of Surfaces 中. Bäcklund 变换主要表现在它们的线性表示的不变性. 也就是说孤子方程中包含的线性表示的守恒经过 Darboux 变换后可以产生新的守恒. 伪球面和 NLS 曲面的自 Bäcklund 变换其实就是 Darboux 阵变换. 曲面上 Bäcklund 变换和 Darboux 阵变换的等价性是 AKNS 系统的一个重要的几何分支.

1955 年数学家 Crum 观察到了经典的 Darboux 变换的谱的性质. 二十年来, Wadati 等在最早的著作中不仅阐述了 Bäcklund 变换, 也讨论了正则的 $1+1$ 维的孤子方程所产生的守恒律, 后来称作 Crum 变换. 经典的 Darboux 变换在孤子理论中所起的作用在 Calogero 和 Degasperis 关于谱变换专著的附录中得以详细描述. 1975 年 Wadati 等将 Darboux 变换推广到偏微分方程. 1882 年, Darboux 提出了他的著名的不变性理论, 这个结果也是 1878 年得到的 Moutard 变换的一种特殊情况.

Darboux 阵形式^[28]与 Zakharov 和 Shabat 提出的穿衣法有关系. 很多人为完善 Darboux 阵方法做出了重要的贡献. 一方面是 Matveev 和 Salle, 另一方面是 Neugebauer 和 Meinel. Levi 阐述了 Bäcklund 变换与穿衣法以及穿衣法与经典的 Darboux 变换之间的联系. 其中, Darboux 阵方法起着非常重要的作用. Cieśliński 最近发表了一个关于 Darboux 阵方法与特定的非等谱问题之间关系的论述.

因此, 到 1976 年, Bäcklund 变换以及 Darboux 变换已经很清楚了. 它们起源于经典的微分几何曲面, 而且和孤子理论有很深的联系^[29]. 非几何的 Bäcklund 变换在孤子理论和连续力学中有着重要的应用.

我国学者在 Bäcklund 变换和 Darboux 变换方面做了许多的研究工作. 1986 年, 谷超豪院士将 Darboux 变换推广到 KdV 族、AKNS 族及 $(2+1)$ 维高维方程组, 并且将 Darboux 变换应用到微分几何中的调和映照和曲面论中. 李翊神教授将 Darboux 变换用于求 Boussinesq 方程的多孤子解. 胡星标^[30]得到了 Belovchaltikian 晶格和一个差分微分的 KdV 方程的 Bäcklund 变换和 nonlinear 叠加公式. 曾云波^[31]教授提出用相似变换引起 Bäcklund 变换的方法, 还运用二元 Darboux 变换求解 AKNS 方程族. 楼森岳教授获得了 Euler 方程的 Darboux 变换, 张鸿庆教授、范恩贵教授^[32]得出了 Kadomtsev-Petvishvili 方程的 Bäcklund 变换. 王明亮教授提出了求 Darboux 变换有效而简便的方法. 内蒙古师范大学的扎其劳教授和华东师范大学的李志斌教授等做了大量的工作^[33-35] 他们得到了复的 mKdV 方程、广义非线性 Schrödinger 方程、 $(2+1)$ 维的孤子方程等一大部分孤子方程的 Darboux 变换、精确解或者周期解.

本文运用延拓结构法构造了 Boussinesq 方程组和修正 KdV 方程组的 Lax 对, 并得到了经典 Boussinesq-Burger 系统、Boussinesq 方程组和复的 KdV 方程的 Darboux 变换, 并在变换的基础上给出了方程的精确解.

2 孤子方程的延拓结构

延拓结构方法以连续的外微分学为主要工具, 是迄今为止最成功的构造非线性方程的 Lax 对的方法. 由于该方法简便易行, 因此得到了广泛的应用. 本章首先介绍 Lax 对和 Lax 方程的概念, 然后利用延拓结构法来求得 Boussinesq 方程组和修正 KdV 方程组的 Lax 对.

2.1 Lax 对及 Lax 方程

本节首先简要介绍 Lax 对和 Lax 方程的定义. 考虑两个算子 L 和 M , 满足下面的关系式:

$$L\Phi = \lambda\Phi, \quad (2.1)$$

$$\Phi_t = M\Phi. \quad (2.2)$$

其中, L 为谱问题算子, M 是本征函数随时间演化算子, λ 是谱参数. 将方程 (2.1) 对自变量 t 求导, 而且假定 $\lambda_t = 0$, 可以得出:

$$L_t\Phi + L\Phi_t = \lambda\Phi_t. \quad (2.3)$$

将 (2.2) 代入 (2.3) 中, 就得出了方程 (2.1) 和方程 (2.2) 的相容性条件:

$$L_t + [L, M] = 0. \quad (2.4)$$

其中, $[L, M] := LM - ML$ 称为算子 L, M 的对易子.

选择合适的算子, (2.4) 就会蕴含一个或几个非线性发展方程. 比如, 取算子 L 与 M 如下:

$$L = [\partial^2 + 2(u - v)][\partial^2 + 2(u + v)] + 4w, \quad (2.5)$$

$$M = \partial^3 + 3u\partial + \frac{3}{2}u_x + 3v_x, \quad (2.6)$$

把 L 和 M 代入 (2.4) 可得 Satsuma-Hirota 耦合方程:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + 3(w - v^2)_x, \\ v_t = -\frac{1}{2}v_{xxx} - 3uv_x, \\ w_t = -\frac{1}{2}w_{xxx} - 3uw_x. \end{cases} \quad (2.7)$$

若一个非线性偏微分方程能写成如上两个该类算子的相容性条件, 则方程 (2.4) 称为该方程的 Lax 表示或者 Lax 方程, 就说该偏微分方程在 Lax 意义下是可积的, 其中算子 L 与 M 或者与之相关的线性问题称为该方程的 Lax 对.

Lax 给出了如何根据一个给定的算子 L 去得出另一个算子 M 的方法, 使得 Lax 方程 (2.4) 是非平凡的.

连续外微分学是 W-E 延拓结构理论的主要工具. 在这里, 只写出本文用到的理论, 详细的定义请参照文献[13].

我们这里提到的空间都是指 Euclid 空间 \mathbb{R}^n .

命题2.1. 如果 d 是外微分算子, 则 d 具有下面的性质:

- 1) $d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\tau,$
- 2) $d^2 = 0.$

定义2.1. 一个理想 $I \subset \Omega^*(\mathbb{R}^n)$, 如果满足 I 被外微分算子 d 作用后还是封闭的. 即:

$$d(I) \subset I, \quad (2.8)$$

就称 I 为一个微分闭理想.

下面以 Boussinesq 方程组和修正 KdV 方程组为例演示延拓结构法.

2.2 Boussinesq 方程组的延拓结构

本节构造 Boussinesq 方程组的延拓结构, 该方程组如下

$$\begin{cases} v_{xx} - 2u_x + v_t = 0, \\ u_t + \frac{2}{3}v_{xxx} - u_{xx} - \frac{2}{3}vv_x = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

步骤一: 引入变量

$$z = v_x, p = v_{xx} = z_x, q = u_x, \quad (2.10)$$

则 (2.9) 可以写成等价的一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} z = v_x, \\ p = v_{xx}, \\ q = u_x, \\ v_t = 2q - p, \\ u_t = q_x - \frac{2}{3}p_x + \frac{2}{3}vz. \end{cases} \quad (2.11)$$

对以上方程组两边做外微分运算可得

$$\begin{cases} dv \wedge dt = z dx \wedge dt, \\ dz \wedge dt = p dx \wedge dt, \\ du \wedge dt = q dx \wedge dt, \\ du \wedge dx = [q_x - \frac{2}{3}p_x + \frac{2}{3}vz] dt \wedge dx, \\ dv \wedge dx = (2q - p) dt \wedge dx. \end{cases} \quad (2.12)$$

在流形 $M = \{x, t, u, v, p, q, z\}$ 上定义一组外微分 2-形式

$$\begin{cases} \alpha_1 = dv \wedge dt - z dx \wedge dt, \\ \alpha_2 = dz \wedge dt - p dx \wedge dt, \\ \alpha_3 = du \wedge dt - q dx \wedge dt, \\ \alpha_4 = du \wedge dx - [q_x - \frac{2}{3}p_x + \frac{2}{3}vz]dt \wedge dx, \\ \alpha_5 = dv \wedge dx - (2q - p)dt \wedge dx. \end{cases} \quad (2.13)$$

步骤二: 引入 n 个 1-形式 ω^k

$$\omega^k = F^k dx + G^k dt + dy^k, \quad (2.14)$$

其中, y^i 为延拓变量, 并要求它与 α_i 是一个新的闭理想. 也就是说要求 ω^k 满足条件

$$d\omega^k \equiv 0 \pmod{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \omega^k)}. \quad (2.15)$$

设

$$d\omega^k = \sum_{i=1}^5 (f_i^k \alpha_i + \eta_i^k \wedge \omega^i), \quad (2.16)$$

其中, f_i^k 为 0-形式, η_i^k 为 1-形式. 而且 F^k, G^k 为

$$\begin{cases} F^k = F^k(x, t, u, v, p, q, z, y^i), \\ G^k = G^k(x, t, u, v, p, q, z, y^i). \end{cases} \quad (2.17)$$

步骤三: 对 ω^k 进行全外微分可得

$$d\omega^k = dF^k \wedge dx + dG^k \wedge dt. \quad (2.18)$$

由 (2.16) 和 (2.18) 可得

$$\sum_{i=1}^5 (f_i^k \alpha_i + \eta_i^k \wedge \omega^i) = dF^k \wedge dx + dG^k \wedge dt.$$

有

$$\begin{aligned} d\omega^k &= F_u^k du \wedge dx + F_v^k dv \wedge dx + F_p^k dp \wedge dx + F_q^k dq \wedge dx \\ &\quad + F_z^k dz \wedge dx + G_u^k du \wedge dt + G_v^k dv \wedge dt + G_p^k dp \wedge dt \\ &\quad + G_q^k dq \wedge dt + G_z^k dz \wedge dt - (F_{y+i}^k dx + G_{y+i}^k dt) \wedge dy^i, \end{aligned} \quad (2.19)$$

令

$$[F^k, G^k] = F^i G_{y+i}^k - G^i F_{y+i}^k.$$

代入 α_i 有

$$\begin{aligned} d\omega^k &= \sum_{i=1}^5 (f_i^k \alpha_i + \eta_i^k \wedge \omega^i) = f_1^k dv \wedge dt + \{-z f_1^k - p f_2^k - \\ &\quad q f_3^k + \frac{2}{3}vz f_4^k + (2q - p)f_5^k\} dx \wedge dt + f_4^k dq \wedge dt - \frac{2}{3}f_4^k dp \wedge dt \\ &\quad + f_2^k dz \wedge dt + f_3^k du \wedge dt + f_4^k du \wedge dx + f_5^k dv \wedge dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

比较对应 2-形式的系数, 得出以下方程组

$$\begin{cases} G_u^k = f_3^k, \\ G_v^k = f_1^k, \\ G_z^k = f_2^k, \\ F_v^k = f_5^k, \\ F_q^k = F_p^k = F_z^k = 0, \\ G_q^k = F_u^k = f_4^k, \\ G_p^k = -\frac{2}{3}G_q^k = -\frac{2}{3}F_u^k = -\frac{2}{3}f_4^k, \\ [F^k, G^k] = zf_1^k + pf_2^k + qf_3^k - \frac{2}{3}vzf_4^k - (2q-p)f_5^k. \end{cases} \quad (2.21)$$

设

$$F^k = uf_4^k + vf_5^k + f_7^k, \quad G^k = uf_3^k + vf_1^k + zf_2^k + qf_4^k + \left(-\frac{2}{3}\right)pf_4^k + f_6^k \quad (2.22)$$

将 F^k, G^k 代入

$$[F^k, G^k] = zf_1^k + pf_2^k + qf_3^k - \frac{2}{3}vzf_4^k - (2q-p)f_5^k,$$

比较每个单项式的系数并应用 Jacobi 恒等式, 可以得到 $f_1^k, f_2^k, f_3^k, f_4^k, f_5^k, f_6^k, f_7^k$ 满足的所有恒等式

$$\begin{aligned} z &: -f_1^k - [f_2^k, f_7^k] = 0, \\ p &: -f_5^k - f_2^k + \frac{2}{3}[f_4^k, f_7^k] = 0, \\ q &: 2f_5^k - f_3^k - [f_4^k, f_7^k] = 0, \\ vz &: \frac{2}{3}f_4^k - [f_2^k, f_5^k] = 0, \\ u &: [f_3^k, f_7^k] + [f_6^k, f_4^k] = 0, \\ uv &: [f_3^k, f_5^k] + [f_1^k, f_4^k] = 0, \\ v &: [f_1^k, f_7^k] + [f_6^k, f_5^k] = 0, \\ u^2 &: [f_3^k, f_4^k] = 0, \\ v^2 &: [f_1^k, f_5^k] = 0, \\ uz &: [f_2^k, f_4^k] = 0, \\ qv &: [f_4^k, f_5^k] = 0, \\ pv &: [f_4^k, f_5^k] = 0, \\ 1 &: [f_6^k, f_7^k] = 0. \end{aligned}$$

假设函数 f_i^k 线性的依赖延拓变量 y^k , 即令 $f_i^k = Y \cdot \bar{f}_i^k$, 其中 $Y = (y^1, \dots, y^N)$, \bar{f}_i^k 是只与谱参数有关的 N 阶方阵. 容易得出, \bar{f}_i^k ($i = 1, \dots, 7$) 仍然满足以上封闭的 Lie 代数结

构关系. 给出该 Lie 代数关系一个三维矩阵实现

$$\begin{aligned} \bar{f}_1^k &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \bar{f}_2^k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_3^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_4^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{f}_5^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_6^k = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_7^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

把上面给定的矩阵代入方程 $f_i = Y \cdot \bar{f}_i$ 以及 (2.22) 后, 可以得到

$$\begin{aligned} F^k &= (-y^2, -y^3, (-u - \lambda)y^1 - vy^2), \\ G^k &= (\frac{2}{3}vy^1 - y^3, (\frac{2}{3}z - u - \lambda)y^1 - \frac{1}{3}vy^2, (\frac{2}{3}p - q)y^1 + (\frac{1}{3}z - u - \lambda)y^2 - \frac{1}{3}vy^3), \end{aligned}$$

由此, 就给出了方程的延拓结构

$$\begin{aligned} \omega^1 &= dy^1 + (-y^2)dx + (\frac{2}{3}vy^1 - y^3)dt, \\ \omega^2 &= dy^2 + (-y^3)dx + [(-u + \frac{2}{3}z - \lambda)y^1 - \frac{1}{3}vy^2]dt, \\ \omega^3 &= dy^3 + [(-u - \lambda)y^1 - vy^2]dx + [(-q + \frac{2}{3}p)y^1 + (-u + \frac{1}{3}z - \lambda)y^2 - \frac{1}{3}vy^3]dt. \end{aligned}$$

将以上 1-形式截取在 2-维子流形

$$N = \{(x, t, u(x, t), v(x, t), p(x, t), q(x, t), y^1(x, t), y^2(x, t), y^3(x, t))\}$$

上, 并令 $\omega^i = 0, i = 1, 2, 3$, 就得到方程组的 Lax 对

$$\Phi_x = F\Phi, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u + \lambda & v & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\Phi_t = G\Phi, \quad G = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}v & 0 & 1 \\ u - \frac{2}{3}v_x + \lambda & \frac{1}{3}v & 0 \\ u_x - \frac{2}{3}v_{xx} & u - \frac{1}{3}v_x + \lambda & \frac{1}{3}v \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

2.3 修正 KdV 方程组的延拓结构

KdV 方程在孤立子理论中起着重要的作用. 科研工作者研究了 KdV 方程的很多种形式, 有复数 KdV 方程, 高阶 KdV 方程等等. 本节讨论修正 KdV 方程组的 Lax 对. 方程组如下

$$\begin{cases} u_t = (k+1)v_x, \\ v_t = -\frac{1}{k+1}(kv_{xx} - v_{xx} - 2w_x), \\ w_t = -\frac{1+k^2}{k+1}v_{xxx} + (k+1)(vu_x + 2uv_x) + \frac{k-1}{k+1}w_{xx}. \end{cases} \quad (2.25)$$

步骤一: 引入新的变量

$$z = v_x, p = v_{xx} = z_x, q = w_x. \quad (2.26)$$

则 (2.25) 可以写成等价的一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} z = v_x, \\ p = v_{xx} = z_x, \\ q = w_x, \\ u_t = (k+1)z, \\ v_t = -\frac{1}{k+1}(kp - p - 2q), \\ w_t = -\frac{1+k^2}{k+1}p_x + (k+1)(vu_x + 2uz) + \frac{k-1}{k+1}q_x. \end{cases} \quad (2.27)$$

对以上方程组两边做外微分运算

$$\begin{cases} dv \wedge dt = z dx \wedge dt, \\ dz \wedge dt = p dx \wedge dt, \\ dw \wedge dt = q dx \wedge dt, \\ du \wedge dx = [(k+1)z] dt \wedge dx, \\ dv \wedge dx = [-\frac{1}{k+1}(kp - p - 2q)] dt \wedge dx, \\ dw \wedge dx = [-\frac{1+k^2}{k+1}p_x + (k+1)(vu_x + 2uz) + \frac{k-1}{k+1}q_x] dt \wedge dx. \end{cases} \quad (2.28)$$

并在流形 $M = \{x, t, u, v, w, p, q, z\}$ 上定义一组外微分 2-形式

$$\begin{cases} \alpha_1 = dv \wedge dt - z dx \wedge dt, \\ \alpha_2 = dz \wedge dt - p dx \wedge dt, \\ \alpha_3 = dw \wedge dt - q dx \wedge dt, \\ \alpha_4 = du \wedge dx - [(k+1)z] dt \wedge dx, \\ \alpha_5 = dv \wedge dx - [-\frac{1}{k+1}(kp - p - 2q)] dt \wedge dx, \\ \alpha_6 = dw \wedge dx - \frac{1+k^2}{k+1} dp \wedge dt + (k+1)v du \wedge dt + uz(k+1) dx \wedge dt + u(k+1) dv \wedge dt + \frac{k-1}{k+1} dq \wedge dt. \end{cases} \quad (2.29)$$

步骤二: 引入 n 个 1-形式 ω^k

$$\omega^k = F^k dx + G^k dt + dy^k, \quad (2.30)$$

其中, y^i 为延拓变量, 并要求其与 α_i 组成一个新的闭理想, 就是要求 ω^k 满足条件

$$d\omega^k \equiv 0 \pmod{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, w^l)}, \quad (2.31)$$

设

$$d\omega^k = \sum_{i=1}^6 (f_i^k \alpha_i + \eta_i^k \wedge \omega^i), \quad (2.32)$$

其中, f_i^k 为 0-形式, η_i^k 为 1-形式.

步骤三: 对 (2.30) 中的 ω^k 进行全外微分可得

$$d\omega^k = dF^k \wedge dx + dG^k \wedge dt, \quad (2.33)$$

同理, 设 $[F^k, G^k] = F^i G_{y+i}^k - G^i F_{y+i}^k$, 并且代入 α_i , 则有

$$\begin{aligned} d\omega^k &= f_1^k dv \wedge dt + f_2^k dz \wedge dt + f_3^k dw \wedge dt + f_4^k du \wedge dx \\ &\quad + f_5^k dv \wedge dx + f_6^k dw \wedge dx - \frac{1+k^2}{1+k} f_6^k dp \wedge dt \\ &\quad + (k+1)v f_6^k du \wedge dt + \frac{k-1}{k+1} f_6^k dq \wedge dt + (-z f_1^k - p f_2^k \\ &\quad - q f_3^k + (k+1)z f_4^k - \frac{1}{k+1}(kp-p-2q)f_5^k + 2uz(k+1)f_6^k) dx \wedge dt, \end{aligned} \quad (2.34)$$

比较对应 2-形式的系数, 得到以下方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} F_u^k = f_4^k, \\ F_v^k = f_5^k, \\ F_w^k = f_6^k, \\ G_v^k = f_1^k + u(k+1)f_6^k, \\ G_w^k = f_3^k, \\ G_z^k = f_2^k, \\ G_u^k = (k+1)v f_6^k, \\ G_p^k = -\frac{1+k^2}{k+1} f_6^k, \\ G_q^k = \frac{k-1}{k+1} f_6^k, \\ F_p^k = F_q^k = F_z^k = 0, \\ [F^k, G^k] = z f_1^k + p f_2^k + q f_3^k - (k+1)z f_4^k + \frac{1}{k+1}(kp-p-2q)f_5^k - 2uz(k+1)f_6^k. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

设

$$F^k = u f_4^k + v f_5^k + w f_6^k + f_7^k, \quad (2.36)$$

$$G^k = w f_3^k + v f_1^k + z f_2^k + uv(k+1)f_6^k + p\left(-\frac{1+k^2}{1+k}\right)f_6^k + q\left(\frac{k-1}{k+1}\right)f_6^k + f_8^k, \quad (2.37)$$

将 F^k, G^k 代入

$$[F^k, G^k] = z f_1^k + p f_2^k + q f_3^k - (k+1)z f_4^k + \frac{1}{k+1}(kp-p-2q)f_5^k - 2uz(k+1)f_6^k$$

通过比较各个单项式的系数并利用 Jacobi 恒等式, 可以得到 $f_1^k, f_2^k, f_3^k, f_4^k, f_5^k, f_6^k, f_7^k, f_8^k$ 满足的所有的恒等式

$$\begin{aligned}
 z &: -f_1^k + (k+1)f_4^k = [f_2^k, f_7^k], \\
 p &: -\left(\frac{k-1}{1+k}\right)f_5^k - f_2^k = -\frac{1+k^2}{1+k}[f_6^k, f_7^k], \\
 q &: \frac{2}{1+k}f_5^k - f_3^k = \frac{k-1}{1+k}[f_6^k, f_7^k], \\
 uz &: (k+1)f_6^k = [f_2^k, f_4^k], \\
 u^2v &: (k+1)[f_6^k, f_4^k] = 0, \\
 uv &: [f_1^k, f_4^k] + (k+1)[f_6^k, f_7^k] = 0, \\
 uw &: [f_3^k, f_4^k] = 0, \\
 uq &: \frac{k-1}{k+1}[f_6^k, f_4^k] = 0, \\
 up &: -\frac{1+k^2}{k+1}[f_6^k, f_4^k] = 0, \\
 u &: [f_8^k, f_4^k] = 0, \\
 uv^2 &: (k+1)[f_6^k, f_5^k] = 0, \\
 v^2 &: [f_1^k, f_5^k] = 0, \\
 vv &: [f_3^k, f_5^k] + [f_1^k, f_6^k] = 0, \\
 vz &: [f_2^k, f_5^k] = 0, \\
 vp &: -\frac{k^2+1}{1+k}[f_6^k, f_5^k] = 0, \\
 v &: [f_8^k, f_5^k] + [f_1^k, f_7^k] = 0, \\
 w^2 &: [f_3^k, f_6^k] = 0, \\
 wz &: [f_2^k, f_6^k] = 0, \\
 w &: [f_8^k, f_6^k] + [f_3^k, f_7^k] = 0, \\
 1 &: [f_8^k, f_7^k] = 0.
 \end{aligned}$$

假设以上函数线性地依赖延拓变量 y^k , 即令 $f_i^k = Y \cdot \bar{f}_i$, 其中 $Y = (y^1, \dots, y^N)$, \bar{f}_i^k 是只与谱参数有关的 N 阶方阵. 很容易验证 \bar{f}_i^k ($i = 1, \dots, 8$) 仍满足以上封闭的 Lie 代数结构关系. 给出该 Lie 代数的一个四维矩阵实现

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_1^k &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \bar{f}_3^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_4^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\bar{f}_5^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_6^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_7^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_8^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

把上面的矩阵代入 $f_i = Y \cdot \bar{f}_i$, 以及 (2.36) 和 (2.37) 就给出了方程的延拓结构

$$\begin{aligned} \omega^1 &= dy^1 + (-y^2)dx + (-y^3)dt, \\ \omega^2 &= dy^2 + (-uy^1 - y^3)dx + (-vy^1 - y^4)dt, \\ \omega^3 &= dy^3 + (-vy^1 - y^4)dx + [(-\lambda + kz - w)y^1 + (-kv - v)y^2]dt, \\ \omega^4 &= dy^4 + [(-\lambda - w)y^1 - kv y^2 - uy^3]dx + [-\frac{1}{k+1}(vu - k^2p + \\ &\quad kq + 2kuv + k^2uv - p - q)y^1 + (-\lambda - z - w)y^2 + (-kv)y^3]dt. \end{aligned}$$

将以上 1-形式截取在 2-维子流形

$$N = \{(x, t, u(x, t), v(x, t), w(x, t), p(x, t), q(x, t), z(x, t), y^1(x, t), y^2(x, t), y^3(x, t))\}$$

上, 并令 $\omega^i = 0, i = 1, 2, 3, 4$, 就得到了方程的 Lax 对

$$\Phi_x = F\Phi, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ u & 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & 0 & 1 \\ \lambda + w & kv & u & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\Phi_t = G\Phi, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & 0 & 1 \\ \lambda - kv_x + w & kv + v & 0 & 0 \\ q & \lambda + v_x + w & kv & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

其中, $q = \frac{1}{k+1}[uv - k^2v_{xx} + kw_x + 2kuv + k^2uv - v_{xx} - w_x]$.

2.4 小结

从以上两个例子可以看出, 延拓结构方法是构造孤子方程 Lax 对很有效的方法. 该方法的关键是给出延拓代数即满足条件的李代数的矩阵实现. 在方程的 Lax 对的基础上可以对方程进行 Darboux 变换或 Bäcklund 变换, 可以得到方程很多有物理意义的解.

3 孤子方程的 Darboux 变换及其精确解

在非线性理论中,孤子方程是非常重要的内容之一,它广泛应用于非线性光学、深水波理论、等离子体物理学等领域.在求解孤子方程精确解的方法中,Darboux 变换是求解孤子方程的多孤子解的一个有效的工具.这一章研究经典 Boussinesq-Burgers 系统、Boussinesq 方程组 (2.9) 和复的 KdV 方程的 Darboux 变换及其精确解.

3.1 经典 Boussinesq-Burgers 系统的 Darboux 变换和精确解

本节构造了经典 Boussinesq-Burgers 系统的 N 次 Darboux 变换.在变换的基础上,得出了该系统的 N 孤子解.

3.1.1 经典 Boussinesq-Burgers 系统的 Darboux 变换

经典 Boussinesq-Burgers 系统广泛应用于物理学和物理地理学.所以对方程组的研究有着重要的意义.该方程组如下:

$$\begin{cases} v_t = \frac{1}{2}(\beta - 1)v_{xx} + 2vv_x + \frac{1}{2}u_x, \\ u_t = (1 - \frac{\beta}{2})\beta v_{xxx} + \frac{1}{2}(1 - \beta)u_{xx} + 2(uv)_x. \end{cases} \quad (3.1)$$

(3.1) 的谱问题:

$$\phi_x = M\phi, M = \begin{pmatrix} \lambda - v & u + \beta v_x \\ -1 & -\lambda + v \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

及附属问题:

$$\phi_t = N\phi, N = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \frac{1}{2}v_x - v^2 & (u + \beta v_x)\lambda + \frac{1}{2}(u + \beta v_x)_x + (u + \beta v_x)v \\ -\lambda - v & -\lambda^2 - \frac{1}{2}v_x + v^2 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

这里 β 是一个常数, (u, v) 是位势, λ 是常谱参数.事实上, Darboux 变换是谱问题 (3.2) 和 (3.3) 的规范变换

$$\bar{\phi} = T\phi, \quad (3.4)$$

要求 $\bar{\phi}$ 也满足同样的谱问题,

$$\bar{\phi}_x = \bar{M}\bar{\phi}, \bar{M} = (T_x + TM)T^{-1},$$

$$\bar{\phi}_t = \bar{N}\bar{\phi}, \bar{N} = (T_t + TN)T^{-1}.$$

也就是说,要找到一个矩阵 T ,使得 M, N 中旧的位势 u, v 可以被新的 \bar{u}, \bar{v} 代替.假设

$$T = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

这里

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A_N(\lambda^N + \sum_{k=0}^{N-1} A_k \lambda^k), B(\lambda) = A_N(\sum_{k=0}^{N-1} B_k \lambda^k), \\ C(\lambda) &= \frac{1}{A_N}(\sum_{k=0}^{N-1} C_k \lambda^k), D(\lambda) = \frac{1}{A_N}(\lambda^N + \sum_{k=0}^{N-1} D_k \lambda^k), \end{aligned} \quad (3.6)$$

A_N, A_k, B_k, C_k, D_k ($0 \leq k \leq N-1$) 都是 x, t 的函数. 假定 $\phi(\lambda_j) = (\phi_1(\lambda_j), \phi_2(\lambda_j))^T, \psi(\lambda_j) = (\psi_1(\lambda_j), \psi_2(\lambda_j))^T$ 是 (3.2) 和 (3.3) 的两个基本解. 由方程 (3.4), 存在常数 r_j ($0 \leq j \leq 2N$) 满足

$$(A(\lambda_j)\phi_1(\lambda_j) + B(\lambda_j)\phi_2(\lambda_j)) - r_j(A(\lambda_j)\psi_1(\lambda_j) + B(\lambda_j)\psi_2(\lambda_j)) = 0, \quad (3.7)$$

$$(C(\lambda_j)\phi_1(\lambda_j) + D(\lambda_j)\phi_2(\lambda_j)) - r_j(C(\lambda_j)\psi_1(\lambda_j) + D(\lambda_j)\psi_2(\lambda_j)) = 0. \quad (3.8)$$

进一步, 方程 (3.7) 和 (3.8) 可以写成一个线性代数系统

$$A(\lambda_j) + \alpha_j B(\lambda_j) = 0, C(\lambda_j) + \alpha_j D(\lambda_j) = 0, \quad (3.9)$$

或者是

$$\sum_{k=0}^{N-1} (A_k + \alpha_j B_k) \lambda_j^k = -\lambda_j^N, \quad \sum_{k=0}^{N-1} (C_k + \alpha_j D_k) \lambda_j^k = -\alpha_j \lambda_j^N, \quad (3.10)$$

其中,

$$\alpha_j = \frac{\phi_2(\lambda_j) - r_j \psi_2(\lambda_j)}{\phi_1(\lambda_j) - r_j \psi_1(\lambda_j)}, \quad 1 \leq j \leq 2N, \quad (3.11)$$

如果适当选择参数 λ_j, r_j ($\lambda_j \neq \lambda_k, j \neq k$), 可以使得方程 (3.10) 的系数行列式非零. 因此, A_N, A_k, B_k, C_k, D_k ($0 \leq k \leq N-1$) 由 (3.10) 唯一确定.

显然, 从方程 (3.6) 可以看到 $\det T(\lambda)$ 是一个 λ 的 $2N$ 次多项式, 并且有

$$\det T(\lambda_j) = A(\lambda_j)D(\lambda_j) - B(\lambda_j)C(\lambda_j). \quad (3.12)$$

也就是, 由 (3.9), 有

$$A(\lambda_j) = -\alpha_j B(\lambda_j), C(\lambda_j) = -\alpha_j D(\lambda_j), \quad (3.13)$$

因此, 可以得出

$$\det T(\lambda_j) = 0, \quad (3.14)$$

说明了 λ_j ($1 \leq j \leq 2N$) 是 $\det(\lambda)$ 的根, 就是说

$$\det T(\lambda_j) = \beta \prod_{j=1}^{2N} (\lambda - \lambda_j), \quad (3.15)$$

β 不依赖 λ .

基于以上事实, 证明以下的命题.

命题3.1. 假定 A_N 满足

$$\partial_x \ln A_N = A_{N-1} + \frac{2C_{N-2} - D_{N-1} - v}{1 - 2C_{N-1}} + v, \quad (3.16)$$

而且

$$A_N^2 = 1 - 2C_{N-1}, \quad (3.17)$$

则矩阵 \bar{M} 与 M 有相同的形式, 就是说

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \lambda - \bar{v} & \bar{u} + \beta \bar{v}_x \\ -1 & -\lambda + \bar{v} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

旧的位置 u, v 可以被以下的变换代替

$$\bar{u} = (u + \beta v_x - 2B_{N-1})(1 - 2C_{N-1}) - \beta \bar{v}_x, \quad \bar{v} = -A_{N-1} - \frac{2C_{N-2} - D_{N-1} - v}{1 - 2C_{N-1}}. \quad (3.19)$$

并有 $A_{-1} = B_{-1} = C_{-1} = D_{-1} = 0$.

证明: $T^{-1} = T^* / \det(T)$ 且有

$$(T_x + TM)T^* = \begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

容易看出 $f_{11}(\lambda), f_{22}(\lambda)$ 是 λ 的 $(2N+1)$ 次的多项式, $f_{12}(\lambda), f_{21}(\lambda)$ 是 λ 的 $2N$ 次的多项式. 从 (3.2) 和 (3.11) 可以得到

$$\alpha_{jx} = -1 + 2(-\lambda_j + v)\alpha_j - (u + \beta v_x)\alpha_j^2. \quad (3.21)$$

通过直接计算, 所有的 λ_j ($0 \leq j \leq 2N$) 都是 $f_{ns}(\lambda)$ ($n, s = 1, 2$) 的根. 令

$$(T_x + TM)T^* = (\det T)p(\lambda), \quad (3.22)$$

其中,

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)}\lambda + p_{11}^{(0)} & p_{12}^{(0)} \\ p_{21}^{(0)} & p_{22}^{(1)}\lambda + p_{22}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

其中 $p_{ns}^{(l)}$ ($n, s = 1, 2, l = 0, 1$) 不依赖 λ . (3.22) 可以写做

$$T_x + TM = p(\lambda)T. \quad (3.24)$$

比较 (3.24) 中 λ^{N+1} 和 λ^N 的系数, 有

$$p_{11}^{(1)} = -p_{22}^{(1)} = 1, \quad (3.25)$$

$$p_{11}^{(0)} = -p_{22}^{(0)} = \partial_x \ln A_N - v, \quad (3.26)$$

$$p_{12}^{(0)} = (1 - 2C_{N-1})(u + \beta v_x - 2B_{N-1}), \quad (3.27)$$

$$p_{21}^{(0)} = \frac{2C_{N-1} - 1}{A_N^2}. \quad (3.28)$$

把 (3.16) 代入 (3.26) 并注意到 (3.19) 中的 \bar{v} , 得到

$$p_{11}^{(0)} = -p_{22}^{(0)} = -\bar{v}. \quad (3.29)$$

注意到 (3.16), (3.17), (3.19) 和 (3.28), 得到

$$p_{12}^{(0)} = \bar{u} + \beta\bar{v}_x, p_{21}^{(0)} = -1. \quad (3.30)$$

因此 $p(\lambda) = \bar{M}$. 证明完毕.

假定 $\phi(\lambda_j)$ 和 $\psi(\lambda_j)$ 也满足 (3.3), 试图证明 \bar{N} 与 N 在变换 (3.4) 和 (3.19) 下有相同的形式.

命题3.2. 假定 A_N 满足关于变量 t 的一阶常微分方程

$$\partial_t \ln A_N = B_{N-1} + v^2 - \bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\bar{v}_x - v_x) + \frac{C_{N-1}(\bar{u} + \beta\bar{v}_x)}{1 - 2C_{N-1}} \quad (3.31)$$

则矩阵 \bar{N} 与 N 有相同的形式, 即

$$N = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \frac{1}{2}\bar{v}_x - \bar{v}^2 & (\bar{u} + \beta\bar{v}_x)\lambda + \frac{1}{2}(\bar{u} + \beta\bar{v}_x)_x + (\bar{u} + \beta\bar{v}_x)\bar{v} \\ -\lambda - \bar{v} & -\lambda^2 - \frac{1}{2}\bar{v}_x + \bar{v}^2 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

则旧的位置 u, v 同样在变换 (3.4) 和 (3.19) 下被新的位置代替.

证明: $T^{-1} = T^* / \det T$, 而且

$$(T_t + TN)T^* = \begin{pmatrix} g_{11}(\lambda) & g_{12}(\lambda) \\ g_{21}(\lambda) & g_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

可以看出 $g_{11}(\lambda), g_{22}(\lambda)$ 都是 λ 的 $2N+2$ 次的多项式, $g_{12}(\lambda), g_{21}(\lambda)$ 都是 λ 的 $2N+1$ 次的多项式. 当 $\lambda = \lambda_j$ ($0 \leq j \leq 2N$) 时, 由 (3.2) 和 (3.11), 得出

$$\alpha_{jt} = (-\lambda_j - v) - 2(\lambda_j^2 + \frac{1}{2}v_x - v^2)\alpha_j - [(u + \beta v_x)\lambda_j + \frac{1}{2}(u + \beta v_x)_x + (u + \beta v_x)v]\alpha_j^2 \quad (3.34)$$

直接计算可知道, 所有的 λ_j ($0 \leq j \leq 2N$) 都是 $g_{ns}(\lambda)$ ($n, s = 1, 2$) 的根. 令

$$(T_t + TN)T^* = (\det T)Q_\lambda, \quad (3.35)$$

其中,

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} q_{11}^{(2)}\lambda^2 + q_{11}^{(1)}\lambda + q_{11}^{(0)} & q_{12}^{(1)}\lambda + q_{12}^{(0)} \\ q_{21}^{(1)}\lambda + q_{21}^{(0)} & q_{22}^{(2)}\lambda^2 + q_{22}^{(1)}\lambda + q_{22}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

且 $q_{ns}^{(l)}$ ($n, s = 1, 2, l = 0, 1$) 不依赖 λ . 现在 (3.35) 可以写做

$$T_t + TN = Q(\lambda)T. \quad (3.37)$$

通过比较 (3.37) 中 $\lambda^{N+2}, \lambda^{N+1}, \lambda^N$ 的系数, 可以看到

$$q_{11}^{(2)} = -q_{22}^{(2)} = 1, q_{11}^{(1)} = -q_{22}^{(1)} = 0, \quad (3.38)$$

$$q_{12}^{(1)} = (1 - 2C_{N-1})(u + \beta v_x - 2B_{N-1}) = \bar{u} + \beta \bar{v}_x, \quad (3.39)$$

$$q_{21}^{(1)} = \frac{2C_{N-1} - 1}{A_N^2} = -1, \quad (3.40)$$

$$q_{21}^{(0)} = \frac{1}{A_N^2}(2C_{N-2} - v - D_{N-1}) + A_{N-1} = -\bar{v}, \quad (3.41)$$

$$q_{12}^{(0)} = A_N^2(uA_{N-1} + \beta v_x A_{N-1} + \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}\beta v_{xxx} + uv + \beta vv_x - 2B_{N-2}) - \frac{D_{N-1}}{A_N^2}(\bar{u} + \beta \bar{v}_x), \quad (3.42)$$

$$q_{11}^{(0)} = -q_{22}^{(0)} = \partial_x \ln A_N + \frac{1}{2}v_x - v^2 - B_{N-1} - \frac{C_{N-1}}{A_N^2}(\bar{u} + \beta \bar{v}_x) \quad (3.43)$$

将 (3.31) 代入 (3.42), 并看到 (3.19) 中的 \bar{u}, \bar{v} , 得到

$$q_{12}^{(0)} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \beta \bar{v}_x)_x + (\bar{u} + \beta \bar{v}_x)v, \quad (3.44)$$

以及

$$q_{11}^{(0)} = -q_{22}^{(0)} = \frac{1}{2}\bar{v}_x - \bar{v}^2. \quad (3.45)$$

因此, $Q(\lambda) = \bar{N}$. 证明完毕.

命题 3.1 和 3.2 说明了变换 (3.4)、(3.19) 把 Lax 对 (3.2)、(3.3) 变成了同种类型的另一个 Lax 对. 因此, 两个 Lax 对都可以生成 (3.1). 称变换 $(\phi, u, v) \rightarrow (\phi, \bar{u}, \bar{v})$ 为方程 (3.1) 的一个 DT 变换. 总之, 有以下的定理.

定理3.1. 方程 (3.1) 的一个解 (u, v) 在变换 (3.4) 和 (3.19) 下, 变为了一个新的解 (\bar{u}, \bar{v}) , 而且, $A_{N-1}, B_{N-1}, C_{N-1}, D_{N-1}$, 和 C_{N-2} 由 (3.10) 给出.

3.1.2 经典 Boussinesq-Burgers 系统的精确解

本节通过变换 (3.4) 和 (3.19) 构造方程 (3.1) 的精确解.

从基本解 $u = 1, v = 0$ 出发, 把 $u = 1, v = 0$ 代入 (3.2) 和 (3.3). 则可以得到 (3.2) 和 (3.3) 的两个基本解

$$\phi_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} \cosh(\xi_j) \\ \mu_j \sinh(\xi_j) - \lambda_j \cosh(\xi_j) \end{pmatrix}, \quad \psi_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} \sinh(\xi_j) \\ \mu_j \cosh(\xi_j) - \lambda_j \sinh(\xi_j) \end{pmatrix}$$

其中, $\mu_j = \sqrt{\lambda_j^2 - 1}, \xi_j = \mu_j(x + \lambda_j t), (0 \leq j \leq 2N)$. 由方程 (3.11), 有

$$\alpha_j = \mu_j \frac{\tanh(\xi_j) - r_j}{1 - r_j \tanh(\xi_j)} - \lambda_j, (0 \leq j \leq 2N). \quad (3.46)$$

经过以上分析, 有以下定理.

定理3.2. 假定 α_j 由 (3.11) 来定义, 并且 A_k, B_k, C_k 以及 D_k , 由线性代数系统 (3.10) 给出. 则 Boussinesq 系统 (3.1) 的解 (u, v) 在变换 (3.4) 和 (3.19) 下变成一个新的解 (\bar{u}, \bar{v})

$$\bar{v}[N] = -A_{N-1} - \frac{2C_{N-2} - D_{N-1} - v}{1 - 2C_{N-1}} = -\frac{\Delta A_{N-1}}{\Delta} - \frac{\frac{2\Delta C_{N-2} - \Delta D_{N-1} - v}{\Delta}}{1 - \frac{2\Delta C_{N-1}}{\Delta}}, \quad (3.47)$$

$$\bar{u}[N] = (u + \beta v_x - 2B_{N-1})(1 - 2C_{N-1}) - \beta \bar{v}_x = (u + \beta v_x - \frac{2\Delta B_{N-1}}{\Delta})(1 - \frac{2\Delta C_{N-1}}{\Delta}) - \beta \bar{v}_x. \quad (3.48)$$

其中, Δ 是线性代数系统 (3.10) 的系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \lambda_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{N-1} & \alpha_1 \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \alpha_2 & \lambda_2 & \alpha_2 \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{N-1} & \alpha_2 \lambda_2^{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_{2N-1} & \lambda_{2N-1} & \alpha_{2N-1} \lambda_{2N-1} & \cdots & \lambda_{2N-1}^{N-1} & \alpha_{2N-1} \lambda_{2N-1}^{N-1} \\ 1 & \alpha_{2N} & \lambda_{2N} & \alpha_{2N} \lambda_{2N} & \cdots & \lambda_{2N}^{N-1} & \alpha_{2N} \lambda_{2N}^{N-1} \end{vmatrix}, \quad (3.49)$$

其中, ΔA_{N-1} 和 ΔB_{N-1} 分别是利用 $(-\lambda_1^N, -\lambda_2^N, \dots, -\lambda_{2N}^N)^T$ 来替换 Δ 的第 $(2N-1)$ 列和第 $2N$ 列, $\Delta C_{N-2}, \Delta D_{N-1}$ 和 ΔC_{N-1} 分别是利用 $(-\alpha_1 \lambda_1^N, -\alpha_2 \lambda_2^N, \dots, -\alpha_{2N} \lambda_{2N}^N)^T$ 来替换 Δ 的第 $(2N-3)$ 列和第 $2N$ 列和第 $(2N-1)$ 列, $\alpha_j (j=1, 2, \dots, 2N)$ 由 (3.46) 给出.

为了简单, 这里只讨论 $N=1$ 的时候, 即单孤子解. 解线性代数系统 (3.10), 有

$$A_0 = \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad B_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad C_0 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad D_0 = \frac{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2 \lambda_2}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (3.50)$$

把 (3.46) 和 (3.47) 代入 (3.19), 可以得到方程 (3.1) 的一个精确解

$$\bar{v}[1] = \frac{1}{f} \left[\lambda_1 \mu_2 \frac{\tanh(\xi_2) - r_2}{1 - r_2 \tanh(\xi_2)} - \lambda_2 \mu_1 \frac{\tanh(\xi_1) - r_1}{1 - r_1 \tanh(\xi_1)} \right] + \frac{\lambda_1 \mu_1 \frac{\tanh(\xi_1) - r_1}{1 - r_1 \tanh(\xi_1)} - \lambda_2 \mu_2 \frac{\tanh(\xi_2) - r_2}{1 - r_2 \tanh(\xi_2)} + \lambda_2^2 - \lambda_1^2}{f - 2(\lambda_2 - \lambda_1)g} \quad (3.51)$$

$$\bar{u}[1] = (1 - 2\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{f}) \left[1 - 2\frac{g(\lambda_2 - \lambda_1)}{f} \right] - \beta \bar{v}_x[1], \quad (3.52)$$

其中,

$$\begin{aligned} f &= \alpha_2 - \alpha_1 = \mu_2 \frac{\tanh(\xi_2) - r_2}{1 - r_2 \tanh(\xi_2)} - \mu_1 \frac{\tanh(\xi_1) - r_1}{1 - r_1 \tanh(\xi_1)} + \lambda_1 - \lambda_2, \\ g &= \alpha_1 \alpha_2 = (\mu_1 \frac{\tanh(\xi_1) - r_1}{1 - r_1 \tanh(\xi_1)} - \lambda_1) (\mu_2 \frac{\tanh(\xi_2) - r_2}{1 - r_2 \tanh(\xi_2)} - \lambda_2), \\ \mu_j &= \sqrt{\lambda_j^2 - 1}, \quad \xi_j = \mu_j(x + \lambda_j t). \end{aligned}$$

而且 $r_j, \lambda_j (j=1, 2)$ 为任意参数.

从以上两个例子可以看出, Darboux 变换是得到方程的精确解的有效的方法. 利用该变换, 可以得到方程的多孤子解.

3.2 Boussinesq 方程组的 Darboux 变换

本节利用 Darboux 阵法来构造 Boussinesq 方程组 (2.9) 的 Darboux 变换. 它的 Lax 矩阵分别为 (2.23) 和 (2.24). 下面进行 Darboux 阵的构造.

假设 (u, v) 是方程组 (2.9) 的解, 而且

$$\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & a_{23}(\lambda) \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

是线性系统 $\Phi_x = F\Phi, \Phi_t = G\Phi$ 的解, 要求 $\det \Phi \neq 0$, 则说 $\Phi(\lambda)$ 是解 (u, v) 的一个表示.

Darboux 阵是 3×3 矩阵形式

$$s(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^l + \sum_{j=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j & \gamma_j \\ c_j & d_j & e_j \\ g_j & h_j & k_j \end{pmatrix} \lambda^j \quad (3.54)$$

满足

(i)

$$\det s(\lambda) = \prod_{i=1}^{3l} (\lambda - \lambda_i) \quad (3.55)$$

λ_i 是 $3l$ 个不同的复数, 并要求 $\det \Phi(\lambda_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 3l$).

(ii)

$$\Phi_1(\lambda) = s(\lambda)\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(\lambda) & \tilde{a}_{12}(\lambda) & \tilde{a}_{13}(\lambda) \\ \tilde{a}_{21}(\lambda) & \tilde{a}_{22}(\lambda) & \tilde{a}_{23}(\lambda) \\ \tilde{a}_{31}(\lambda) & \tilde{a}_{32}(\lambda) & \tilde{a}_{33}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

对于每一个 $\lambda = \lambda_i$ 时, 矩阵的三列有常系数的线性关系

$$\omega_i \tilde{a}_{\eta 1}(\lambda_i) + \xi_i \tilde{a}_{\eta 2}(\lambda_i) + \psi_i \tilde{a}_{\eta 3}(\lambda_i) = 0, (\eta = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, 3l). \quad (3.57)$$

其中, ω_i, ξ_i, ψ_i 为不全等于 0 的常数.

现在开始构造 Darboux 阵. 不妨设 $\omega_i \neq 0$, 令

$$x_i = \frac{\xi_i}{\omega_i}, y_i = \frac{\psi_i}{\omega_i},$$

则, 方程 (3.57) 变成

$$\tilde{a}_{\eta 1}(\lambda_i) + x_i \tilde{a}_{\eta 2}(\lambda_i) + y_i \tilde{a}_{\eta 3}(\lambda_i) = 0, (\eta = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, 3l). \quad (3.58)$$

把 (3.56) 代入 (3.57) 得到

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{l-1} (\rho_i \alpha_j + \tau_i \beta_j + \pi_i \gamma_j) \lambda_i^j &= -\lambda_i^l \rho_i, \\ \sum_{j=0}^{l-1} (\rho_i c_j + \tau_i d_j + \pi_i e_j) \lambda_i^j &= -\lambda_i^l \tau_i, \\ \sum_{j=0}^{l-1} (\rho_i g_j + \tau_i h_j + \pi_i k_j) \lambda_i^j &= -\lambda_i^l \pi_i. \end{aligned} \quad (3.59)$$

其中,

$$\begin{aligned}\rho_i &= a_{11}(\lambda_i) + x_i a_{12}(\lambda_i) + y_i a_{13}(\lambda_i), \\ \tau_i &= a_{21}(\lambda_i) + x_i a_{22}(\lambda_i) + y_i a_{23}(\lambda_i), \\ \pi_i &= a_{31}(\lambda_i) + x_i a_{32}(\lambda_i) + y_i a_{33}(\lambda_i).\end{aligned}\tag{3.60}$$

令

$$A_i = \frac{\tau_i}{\rho_i}, B_i = \frac{\pi_i}{\rho_i}.\tag{3.61}$$

则, 方程 (3.59) 化为

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{l-1} (\alpha_j + A_i \beta_j + B_i \gamma_j) \lambda_i^j &= -\lambda_i^l, \\ \sum_{j=0}^{l-1} (c_j + A_i d_j + B_i e_j) \lambda_i^j &= -\lambda_i^l A_i, \\ \sum_{j=0}^{l-1} (g_j + A_i h_j + B_i k_j) \lambda_i^j &= -\lambda_i^l B_i.\end{aligned}\tag{3.62}$$

$(i = 1, 2, \dots, 3l).$

(3.60) 是 $9l$ 个未知数 $9l$ 个方程的线性方程组,

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, c_i, d_i, e_i, g_i, h_i, k_i.$$

现在考虑特殊情况. 当 $l = 1$ 时,

$$s(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ c_0 & d_0 & e_0 \\ g_0 & h_0 & k_0 \end{pmatrix}\tag{3.63}$$

解得

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, c_0, d_0, e_0, g_0, h_0, k_0.$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned}\Phi_{1,x} &= s_x \Phi + sF\Phi = (s_x s^{-1} + sF s^{-1})\Phi_1, \\ \Phi_{1,t} &= s_t \Phi + sG\Phi = (s_t s^{-1} + sG s^{-1})\Phi_1.\end{aligned}\tag{3.64}$$

令

$$F_1 = s_x s^{-1} + sF s^{-1}, G_1 = s_t s^{-1} + sG s^{-1}.\tag{3.65}$$

(3.61) 中的 A_i, B_i 满足

$$\begin{aligned}A_{i,x} &= B_i - A_i^2, \\ B_{i,x} &= \lambda_i + u + vA_i - B_i A_i.\end{aligned}\tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}A_{i,t} &= (u - \frac{2}{3}v_x + \lambda_i) + vA_x - B_i A_i, \\ B_{i,t} &= (u_x - \frac{2}{3}v_{xx}) + (u - \frac{1}{3}v_x + \lambda_i)A_i + vB_i - B_i^2.\end{aligned}\tag{3.67}$$

假设 (u, v) 是偏微分方程组 (2.9) 的一个已知解, 则 $\Phi(\lambda)$ 为这个解的一个表示. 设 $s(\lambda)$ 为 Darboux 阵而且 $\Phi_1(\lambda) = s(\lambda)\Phi(\lambda)$, $\lambda_i, x_i, y_i, i = 1, 2, 3$, 为给定的常数, 则有以下结果: 当

$$B_3A_2 - B_1A_2 + B_1A_3 - B_2A_3 + B_2A_1 - B_3A_1 \neq 0, \quad (3.68)$$

$$(\lambda_3A_2 - \lambda_3A_1) + (-\lambda_1A_2 + \lambda_1A_3) + (-\lambda_2A_3 + \lambda_2A_1) = 0, \quad (3.69)$$

$$A_3(\lambda_3A_2 - \lambda_3A_1) + A_1(-\lambda_1A_2 + \lambda_1A_3) + A_2(-\lambda_2A_3 + \lambda_2A_1) = 0, \quad (3.70)$$

有

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u_1 + \lambda & v_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}v_1 & 0 & 1 \\ u_1 - \frac{2}{3}v_{1,x} + \lambda & \frac{1}{3}v_1 & 0 \\ u_{1,x} - \frac{2}{3}v_{1,xx} & u_1 - \frac{1}{3}v_{1,x} + \lambda & \frac{1}{3}v_1 \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

$$u_1 = u + \frac{\lambda_1(B_3A_2 + B_1A_2 - B_2A_3 - B_3A_1)}{(B_3 - B_1)A_2 + (B_1 - B_2)A_3 + (B_2 - B_3)A_1} + \frac{\lambda_2(-B_2A_1 + B_2A_3 - B_3A_1 + B_1A_3)}{(B_3 - B_1)A_2 + (B_1 - B_2)A_3 + (B_2 - B_3)A_1} + \frac{\lambda_3(B_2A_1 + B_3A_1 - B_3A_2 - B_1A_2)}{(B_3 - B_1)A_2 + (B_1 - B_2)A_3 + (B_2 - B_3)A_1}, \quad (3.73)$$

$$v_1 = v + \frac{\lambda_1(B_3 - B_2) + \lambda_2(B_1 - B_3) + \lambda_3(B_2 - B_1)}{(B_3 - B_1)A_2 + (B_1 - B_2)A_3 + (B_2 - B_3)A_1}. \quad (3.74)$$

变换中的 A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$) 满足 (3.61), (3.66), (3.67).

有了方程的 Darboux 变换, 如果已知方程的一个初始解 (u, v) , 把它代入 (3.73), (3.74), 就可以得到一个新的解, 而且可以继续做下去.

3.3 复的 KdV 方程的 Darboux 变换和精确解

这一部分讨论复的 KdV 方程^[36]的 Darboux 变换和精确解, 可以看到 Darboux 变换是求解方程精确解的一个有效方法.

3.3.1 复的 KdV 方程的 Darboux 变换

本节讨论复的 KdV 方程的 Darboux 变换. 该方程如下:

$$u_{xxx} - 6uu_x + u_t = 0 \quad (3.75)$$

它的 Lax 对为

$$L\Psi = \lambda\Psi, \Psi_t = A\Psi, \quad (3.76)$$

其中, 算子 L 为

$$L = -\partial_x^2 + u, A = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x, \quad (3.77)$$

直接计算 Lax 方程 $L_t = [A, L]$, 可以回到方程 (3.75).

下面给出复的 KdV 方程 (3.75) 的 Darboux 变换.

假定 Ψ 满足方程 (3.76), 并且 $A = -(\ln f)_x$. 引入一个函数

$$\bar{\Psi} = \Psi_x + A\Psi. \quad (3.78)$$

利用方程 (3.76) 的第一个表达式, 通过直接计算可以得到以下的方程

$$\bar{\Psi}_x = \Psi_{xx} + A\Psi_x + A_x\Psi, \quad (3.79)$$

$$\bar{\Psi}_{xx} = (u - \lambda + 2A_x)\Psi_x + (u_x + Au - A\lambda + A_{xx})\Psi. \quad (3.80)$$

把方程 (3.79) 和 (3.80) 代入方程

$$\bar{L}\bar{\Psi} = \lambda\bar{\Psi}, \quad (3.81)$$

其中

$$\bar{L} = -\partial_x^2 + \bar{u}, \quad (3.82)$$

比较 Ψ, Ψ_x 的系数得出

$$\bar{u} = u + 2A_x, \quad (3.83)$$

$$2AA_x - u_x - A_{xx} = 0. \quad (3.84)$$

方程 (3.83) 说明了

$$\bar{u} = u - 2(\ln f)_{xx}. \quad (3.85)$$

即

$$\bar{u} = u - 2f_{xx}f^{-1} + 2f_x^2f^{-2}. \quad (3.86)$$

变换 (3.86) 中的 $u \rightarrow \bar{u}$ 叫做复的 KdV 方程 (3.75) 的 Darboux 变换.

3.3.2 复的 KdV 方程的精确解

这一部分我们讨论方程 (3.75) 在 Darboux 变换 (3.86) 下的精确解.

(一) 取方程 (3.75) 的初始解 $u = 0$, 则方程 (3.76) 简化为

$$\Psi_{xx} = -\lambda\Psi, \Psi_t = -4\Psi_{xxx}. \quad (3.87)$$

(1) 当 $\lambda = 0$ 时, 可以看出方程 (3.87) 有一个一般解

$$f = \alpha x + \beta, \quad (3.88)$$

这里, α, β 为常数, 利用变换 (3.86), 可以得到方程 (3.75) 的一个解

$$\bar{u} = \frac{2\alpha^2}{(\alpha x + \beta)^2}. \quad (3.89)$$

(2) 当 $\lambda = k^4 > 0$, (3.87) 有一个一般解

$$f = c_1 \cos(X) + c_2 \sin(X), \quad (3.90)$$

这里, c_1, c_2 是常数, $X = 4k^6t + k^2x$. 利用变换 (3.86), 可以得到方程 (3.75) 的一个精确解

$$\bar{u} = \frac{4k^4c_1^2 + 4k^4c_2^2}{c_1^2 \cos(2X) + c_1^2 + 2c_1c_2 \sin(2X) + c_2^2 - c_2^2 \cos(2X)}. \quad (3.91)$$

(3) 对于 $\lambda = -k^4 < 0$, (3.87) 有一个一般解

$$f = c_2e^Y + c_1e^{-Y}, \quad (3.92)$$

c_1, c_2 是常数, $Y = -4k^6t + k^2x$. 利用变换 (3.86), 可以得到方程 (3.75) 的一个精确解

$$f = \frac{2(c_2k^2e^Y - c_1k^2e^{-Y})^2}{(c_2e^Y + c_1e^{-Y})^2} + \frac{-2c_2k^4e^Y - 2c_1k^4e^{-Y}}{c_2e^Y + c_1e^{-Y}}. \quad (3.93)$$

(二) 取方程 (3.75) 的初始解 $u = \frac{1}{2}a$, 则方程 (3.76) 简化为:

$$\Psi_{xx} = \left(\frac{1}{2}a - \lambda\right)\Psi, \Psi_t = -4\Psi_{xxx} + 3a\Psi_x. \quad (3.94)$$

(1) 当 $\lambda = 0, a = k^2 > 0$ 时, 可以看出方程 (3.94) 存在一个一般解

$$f = c_2e^Z + c_1e^{-Z}, \quad (3.95)$$

其中, c_1, c_2 是常数, 且 $Z = \frac{1}{2}k\sqrt{2}x + \frac{1}{2}k\sqrt{2}(3a - 2k^2)kt$, 利用变换 (3.86), 可以得到方程 (3.75) 的一个精确解

$$\bar{u} = \frac{2\left(\frac{1}{2}c_2k\sqrt{2}e^Z - \frac{1}{2}c_1k\sqrt{2}e^{-Z}\right)^2}{(c_2e^Z + c_1e^{-Z})^2} + \frac{-c_2k^2e^Z - c_1k^2e^{-Z}}{c_2e^Z + c_1e^{-Z}} + \frac{1}{2}k^2. \quad (3.96)$$

(2) 当 $\lambda = 0, a = -k^2 < 0$ 时, 可以看出方程 (3.94) 存在一个一般解

$$f = c_1 \cos(P) + c_2 \sin(P), \quad (3.97)$$

其中, c_1, c_2 是常数, 且 $P = \frac{3}{2}\sqrt{2}tka + \sqrt{2}tk^3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}kx$. 利用变换 (3.86), 可以得到方程 (3.75) 的一个精确解

$$\bar{u} = \frac{-k^2c_1^2 \cos(2P) + 3k^2c_1^2 - 2k^2c_1c_2 \sin(2P) + 3k^2c_2^2 + k^2c_2^2 \cos(2P)}{2c_1^2 \cos(2P) + 2c_1^2 + 4c_1c_2 \sin(2P) + 2c_2^2 - 2c_2^2 \cos(2P)}. \quad (3.98)$$

(三) 取方程 (3.75) 的初始解 $u = \frac{1}{4}(a + b)$, 则方程 (3.76) 简化为

$$\Psi_{xx} = \left(\frac{1}{4}(a + b) - \lambda\right)\Psi, \Psi_t = -4\Psi_{xxx} + \frac{3}{2}(a + b)\Psi_x. \quad (3.99)$$

(1) 当 $\lambda = \frac{1}{4}(a - b)^2, a = \alpha^2 > 0, b = \beta^2 > 0$ 时, 可以看出方程 (3.99) 存在一个一般解

$$f = c_1 \sin(Q) + c_2 \cos(Q), \quad (3.100)$$

其中, c_1, c_2 是常数, 且 $Q = \frac{1}{2}Q_1\alpha^4t - Q_1\alpha^2\beta^2t + \frac{1}{2}Q_1\beta^4t + \frac{1}{4}Q_1\alpha^2t + \frac{1}{4}Q_1\beta^2t + \frac{1}{2}Q_1x, Q_1 = \sqrt{-\alpha^2 + \alpha^4 - \beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4}$. 利用变换 (3.86), 可以得到方程 (3.75) 的一个精确解

$$\bar{u} = \frac{A}{B}, \quad (3.101)$$

这里

$$A = -2\beta^2 c_1 c_2 \sin(2Q) + 8\alpha^2 \beta^2 c_1^2 + 8\alpha^2 \beta^2 c_2^2 + 3\alpha^2 c_2^2 - \alpha^2 c_2^2 \cos(2Q) - 4\alpha^4 c_1^2 - 4\alpha^2 c_2^2 + 3\beta^2 c_1^2 + \beta^2 c_1^2 \cos(2Q) + 3\beta^2 c_2^2 - \beta^2 c_2^2 \cos(2Q) - 4\beta^4 c_1^2 - 4\beta^4 c_2^2 + \alpha^2 c_1^2 \cos(2Q) + 3\alpha^2 c_1^2 - 2\alpha^2 c_1 c_2 \sin(2Q),$$

$$B = -4c_1^2 + 4c_1^2 \cos(2Q) - 8c_1 c_2 \sin(2Q) - 4c_2^2 \cos(2Q) - 4c_2^2.$$

(2) 当 $\lambda = \frac{1}{4}(a-b)^2, a = \alpha^2 > 0, b = -\beta^2 < 0$ 时, 方程 (3.99) 存在一个一般解

$$f = c_1 \sin(R) + c_2 \cos(R), \quad (3.102)$$

其中, c_1, c_2 是常数, 且 $R = \frac{1}{4}R_1\alpha^2 t + R_1\alpha^2\beta^2 t - \frac{1}{4}R_1\beta^2 t + \frac{1}{2}R_1\alpha^4 t + \frac{1}{2}R_1\beta^4 t + \frac{1}{2}R_1 x, R_1 = \sqrt{-\alpha^2 + \alpha^4 + \beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4}$. 利用变换 (3.86), 可以得到方程 (3.75) 的一个精确解

$$\bar{u} = \frac{C}{D}, \quad (3.103)$$

这里

$$C = 3\alpha^2 c_1^2 - 4\beta^2 c_2^2 + \alpha^2 c_1^2 \cos(2R) - 8\alpha^2 \beta^2 c_1^2 + 2\beta^2 c_1 c_2 \sin(2R) - 8\alpha^2 \beta^2 c_2^2 + 3\alpha^2 c_2^2 - \alpha^2 c_2^2 \cos(2R) - 3\beta^2 c_1^2 - \beta^2 c_1^2 \cos(2R) - 4\alpha^4 c_1^2 - 4\alpha^4 c_2^2 - 4\beta^2 c_1^2,$$

$$D = -4c_1^2 + 4c_1^2 \cos(2R) - 8c_1 c_2 \sin(2R) - 4c_2^2 \cos(2R) - 4c_2^2.$$

(3) 当 $\lambda = \frac{1}{4}(a-b)^2, a = -\alpha^2 < 0, b = \beta^2 > 0$ 时, 方程 (3.99) 存在一个一般解

$$f = c_1 \cos(T) + c_2 \sin(T), \quad (3.104)$$

其中, c_1, c_2 是常数, 且 $T = \frac{1}{2}T_1\alpha^4 t + T_1\alpha^2\beta^2 t - \frac{1}{4}T_1\alpha^2 t + \frac{1}{2}T_1\beta^4 t + \frac{1}{4}T_1\beta^2 t + \frac{1}{2}T_1 x, T_1 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4 - \beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4}$. 利用变换 (3.86), 可以得到方程 (3.75) 的一个精确解

$$\bar{u} = \frac{E}{F}, \quad (3.105)$$

其中,

$$E = 3\alpha^2 c_1^2 + 2\beta^2 c_1 c_2 \sin(2T) - 2\alpha^2 c_1 c_2 \sin(2T) + 8\alpha^2 \beta^2 c_2^2 - \alpha^2 c_1^2 \cos(2T) + 8\alpha^2 \beta^2 c_1^2 - 3\beta^2 c_1^2 + 4\alpha^4 c_1^2 + 4\beta^4 c_1^2 + 3\alpha^2 c_2^2 + \alpha^2 c_2^2 \cos(2T) + 4\alpha^4 c_2^2 + \beta^2 c_1^2 \cos(2T) - 3\beta^2 c_2^2 - \beta^2 c_2^2 \cos(2T) + 4\beta^4 c_2^2,$$

$$F = 4c_1^2 \cos(2T) + 4c_1^2 + 8c_1 c_2 \sin(2T) + 4c_2^2 - 4c_2^2 \cos(2T).$$

(4) 当 $\lambda = \frac{1}{4}(a-b)^2, a = -\alpha^2 < 0, b = -\beta^2 < 0$ 时, 方程 (3.99) 存在一个一般解

$$f = c_1 \cos(K) + c_2 \sin(K), \quad (3.106)$$

其中, c_1, c_2 是常数, 且 $K = \frac{1}{2}K_1\alpha^4 t + K_1\alpha^2\beta^2 t - \frac{1}{4}K_1\alpha^2 t + \frac{1}{2}K_1\beta^4 t + \frac{1}{4}K_1\beta^2 t + \frac{1}{2}K_1 x, K_1 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4 + \beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4}$. 利用变换 (3.86), 可以得到方程 (3.75) 的一个精确解

$$\bar{u} = \frac{G}{H}, \quad (3.107)$$

其中,

$$G = 3\beta^2 c_2^2 - 2\alpha^2 c_1 c_2 \sin(2K) - 2\beta^2 c_1 c_2 \sin(2K) + \beta^2 c_2^2 \cos(2K) - \beta^2 c_1^2 \cos(2K) + \alpha^2 c_2^2 \cos(2K) + 3\alpha^2 c_1^2 + 3\alpha^2 c_2^2 - \alpha^2 c_1^2 \cos(2K) + 4\alpha^4 c_2^2 - 8\alpha^2 \beta^2 c_1^2 + 3\beta^2 c_1^2 + 4\alpha^4 c_1^2 + 4\beta^4 c_1^2 - 8\alpha^2 \beta^2 c_2^2 + 4\beta^4 c_2^2,$$

$$H = 4c_1^2 \cos(2K) + 4c_1^2 + 8c_1^2 c_2^2 \sin(2K) + 4c_2^2 - 4c_2^2 \cos(2K).$$

由以上可以看出, 有了方程的 Darboux 变换, 就可以由已知解得到新的解. 取适当的参数值, 就可以得到方程很多有物理意义的解.

3.4 小结

从以上例子可以看出, Darboux 变换是非线性方程的谱问题的规范变换, 是得到方程的解非常有效的方法之一. 利用它可以得到方程的 1-孤子解、2-孤子解、多孤子解. Darboux 阵法在求解方程的 Darboux 变换的时候会经常用到, 它的优点是可以继续做下去. 该方法的关键是取合适的参数, 从而减少运算量, 得到很多有价值的解.

4 结论

孤立子理论和可积系统是非线性学科的一个重要分支,它在物理光学、磁学以及地理学等领域的广泛应用,使得该分支有着广阔的发展前景. 鉴于能力和时间,本文只简单介绍了该理论中的两种求解方法:延拓结构方法和 Darboux 变换方法,并应用于几个孤子方程.

(1) 延拓结构理论是孤立子理论与可积系统中的一个十分重要的理论,它以连续的外微分学为主要工具,是构造方程的 Lax 对最为成功的方法. 作者利用延拓结构方法得到了 Boussinesq 方程组和修正 KdV 方程组的 Lax 对. 该方法的关键问题是给出延拓代数的一个矩阵实现.

(2) Darboux 变换和 Bäcklund 变换在求解孤子方程的解的时候会经常用到. 它的实用之处是可以由一个初始解生成一个新的解,而且可以继续下去,得到一些在物理地理学方面有现实意义的解. 本文得到了经典 Boussinesq-Burgers 系统、Boussinesq 方程组和复的 KdV 方程的 Darboux 变换.

在对以上内容的探讨中,作者认为还有一些问题值得研究.

(1) 目前所研究的延拓结构法还局限于连续的非线性偏微分方程,对于离散的和半离散的延拓结构理论研究讨论的还不是很多. 另外,延拓结构对 1+1 维的非线性演化方程有很大的普适性,但随着维数的增高,比如说 2+1 维的孤子方程,相应的延拓结构也会变得复杂. 这需要在这些方面做出更多的工作.

(2) 求解 Bäcklund 变换的方法有很多种,具体到孤子方程,用哪种方法对方程进行变换,这就要根据方程的具体形式来判定. 同样,对于具有高阶 Lax 矩阵的孤子方程的 Darboux 变换和 Bäcklund 变换研究的还比较少,主要也是因为它的复杂性. 在做此类方程的变换的过程中,需要多尝试几次. 作者利用 Darboux 阵方法具体求解了一个方程的 Darboux 变换,要想得到有意义的解,关键问题是给出适当的参数. 因此,参数如何选择就变得很重要,尤其是具有高阶 Lax 矩阵的孤子方程.

由此,非线性偏微分方程还有很多事情需要做,这需要我们不断地努力去学习 and 研究这一课题.

参考文献

- [1] ABLOWITZ M J, CLARKSON P A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [2] 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子理论中的 Darboux 变换及其几何应用[M]. 上海: 上海科技出版社, 1999.
- [3] 谷超豪, 郭柏灵, 李翊神等. 孤立子理论与应用[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1990.
- [4] BABELON O, BERNARD D, TALON M. Introduction to classical integrable systems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [5] CAO C W, GENG X G. A nonconfocal generator of involutive system and three associated soliton hierarchies[J]. Journal of Mathematical Physics, 1991, 32(9): 2323-2328.
- [6] ZENG Y B, LI Y S. The constraints of potentials and the finite-dimensional integrable systems[J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(8): 1679-1689.
- [7] MA W X. New finite-dimensional integrable systems by symmetry constraint of the KdV equations[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1995, 64(4): 1085-1091.
- [8] MANAKOV S V, SANTINI P M. Inverse scattering problem for vector fields and the Cauchy problem for the heavenly equation[J]. Physics Letters A, 2006, 359: 613-619.
- [9] KUNIBA A, TAKAGI T, TAKENOUCI A. Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system[J]. Nuclear Physics B, 2006, 747: 354-397.
- [10] ZHANG Y, DANG X L, XU H X. Bäcklund transformations and soliton solutions for the KdV6 equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(13): 6230-6236.
- [11] GENG T, MENG X H, SHAN W R, TIAN B. Bäcklund transformation and multi-soliton solutions for a (2+1)-dimensional Korteweg-de Vries system via symbolic computation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(4): 1470-1475.
- [12] SHANG Y D, HUANG Y, YUAN W J. Bäcklund transformation and abundant exact explicit solutions of the Sharma-Tasso-Olver equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(1): 7172-7183.
- [13] YANG L, ZHANG F J, WANG Y H. The homogeneous balance method, Lax pair, Hirota transformation and a general fifth-order KdV equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002, 13(2): 337-340.
- [14] AXEL S H. Modified Darboux transformations with foreign auxiliary equations[J]. Physics Letters A, 2011, 375: 2513-2518.

- [15] GENG X G, HE G L. Darboux transformation and explicit solutions for the Satsuma-Hirota coupled equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 216: 2628-2634.
- [16] LI W M, HAN Y P, ZHOU G J. Darboux transformation of a nonlinear evolution equation and its explicit solutions[J]. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31B(4): 1457-1464.
- [17] WEN X Y, GAO Y T, WANG L. Darboux transformation and explicit solutions for the integrable sixth-order KdV equation for nonlinear waves[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218: 55-60.
- [18] MENG D X, GAO Y T, WANG L, GAI X L. N -fold Darboux transformation and solitonic interactions of a variable-coefficient generalized Boussinesq system in shallow water[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218: 4049-4055.
- [19] WAHLQUIST H D, ESTABROOK F B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations[J]. Journal of Mathematical Physics. 16(1): 1-7.
- [20] ESTABROOK F B, WAHLQUIST H D. Prolongation structures of nonlinear evolution equations II[J]. Journal of Mathematical Physics, 1976, 17(7): 1293-1297.
- [21] HERMANN R. Pseudopotentials of Estabrook and Wahlquist, the geometry of solitons and the theory of connections[J]. Physical Review Letters, 1976, 36(15): 835-836.
- [22] GUO H Y, WU K, HSIANG Y Y. $SL(2, R)$ principal prolongation structures of soliton equations and their conservation laws[J]. Communications in Theoretical Physics, 1982, 1(5): 607-615.
- [23] WANG D S. Integrability of the coupled KdV equations derived from two-layer fluids: prolongation structure and miura transformations[J], Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 2010, 73: 270-281.
- [24] 谢涛. Konno-Asai-Kakuhata 方程的协变延拓结构[D]. 北京: 首都师范大学, 2008.
- [25] 李挡振. 半离散MKdV方程的延拓结构[D]. 河南: 河南大学, 2008.
- [26] WU G C. Prolongation approach to Lax pairs and Bäcklund transformation of the variable coefficient KdV equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42(1): 408-411.
- [27] WANG D S. Integrability of a coupled KdV system: Painlevé property, Lax pair and Bäcklund transformation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 216(4): 1349-1354.
- [28] GU C H, ZHOU Z X. On the Darboux matrices of Bäcklund transformations for AKNS systems[J]. Letters in Mathematical Physics, 1987, 13(3): 179-187.

-
- [29] ROGERS C, SCHIEF W K. Bäcklund and Darboux transformations geometry and modern applications in soliton theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [30] HU X B, CLARKSON P A, Backlund transformations and nonlinear superposition formulae of a differential-difference KdV equation[J]. Journal of Physics A-Mathematical and General, 1998, 31(5): 1405-1414.
- [31] ZENG Y B. Darboux transformation for AKNS hierarchy with sources[J]. Acta Mathematica Scientia, 1995, 15(3): 337-345.
- [32] 张鸿庆, 范恩贵. 2+1 维 Kadomtsev-Petvishvili 方程的 Bäcklund 变换和精确解[N]. 大连理工大学学报, 1997, 37(6): 624-626.
- [33] ZHAQILAO, CHEN Y, LI Z B. Darboux transformation and multi-soliton solutions for some soliton equations[J]. ScienceDirect, Chaos, Soliton and Fractals, 2009, 41(2): 661-670.
- [34] ZHAQILAO, LI Z B. Periodic wave solutions of generalized derivative nonlinear Schrödinger equation[J]. Chinese Physics Letters, 2008, 25(11): 3844-3847.
- [35] CHEN Y, AN H L, LI Z B. The function cascade synchronization approach with uncertain parameters or not for hyperchaotic systems[J]. ScienceDirect, Applied Mathematics and Computation, 2008, 197(1): 96-110.
- [36] CHARLES Y L. Simple explicit formula for finite time blow up solutions to the complex KdV equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 39(1): 369-372.

攻读硕士学位期间发表学术论文情况

- 1 马占运, 梅建琴. Boussinesq 方程组的 Lax 对及 Bäcklund 变换. 大连理工大学网络学刊. (本硕士论文第三章).
- 2 Mei Jianqin, **Ma Zhanyun**. N-fold Darboux Transformation and multi-Soliton solutions for the classical Boussinesq-Burgers System. Applied Mathematics and Computation. (已投)

致 谢

本文是在导师梅建琴老师的悉心指导和无微不至的关怀下完成的。梅老师渊博的知识,深刻的数学思想,孜孜不倦求数学真谛的精神以及严谨的治学态度,使作者受益终身。值此论文完成之际,向导师表示崇高的敬意和衷心的感谢!感谢导师为作者提供了良好的学习环境,同时感谢导师给予作者生活上极大的帮助!

衷心感谢张鸿庆教授对作者的关心和鼓励!张老师豁达的胸怀,浑然一体的数学思想对作者影响深远。在此,衷心祝愿张老师福如东海,寿比南山。

感谢教研室丁琦师兄,王振师兄,王金枝师姐,王飞师兄,陈晓红师姐,吕娜师姐,李玮师姐,张盛师兄,董建国师兄,田守富师兄,王海燕师姐,孟莹师姐,孙玉娟,房春梅,高飞等在作者论文时的热情帮助。感谢教研室其他同学在讨论班上的讨论。感谢室友刘珍珍,刘瑞对作者学习和生活上的关心。

最后,感谢父母一直以来对作者的支持,没有他们的鼓励,作者是完不成学业的。

感谢公公婆婆,爱人王辉以及女儿王卓越小朋友的支持和理解!

感谢所有关心过我的人。祝愿他们身体健康,工作顺利!

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本人完全了解学校有关学位论文知识产权的规定,在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于大连理工大学,允许论文被查阅和借阅.学校有权保留论文并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印、或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文.

学位论文题目:_____

作者签名:_____日期:_____年____月____日

导师签名:_____日期:_____年____月____日